

LBDIS

We know
books

**IURIE BOREICO
TUDOR MICU**

**ANDREI CIUPAN
LÁSZLÓ SZILÁRD**

OLIMPIADELE DE MATEMATICĂ

**2006
CLASA a IX-a**

Editura GIL

Cuprins

1	Clasa a IX-a - Enunțuri	11
1.1	Etapă locală	11
1.1.1	Alba	11
1.1.2	Arad	11
1.1.3	Argeș	12
1.1.4	Bacău	13
1.1.5	Bihor	13
1.1.6	Botoșani	14
1.1.7	Brașov	14
1.1.8	Brăila	15
1.1.9	București	15
1.1.10	Buzău	16
1.1.11	Caraș-Severin	16
1.1.12	Călărași	17
1.1.13	Cluj	18
1.1.14	Constanța	18
1.1.15	Dâmbovița	19
1.1.16	Dolj	20
1.1.17	Galați	20
1.1.18	Giurgiu	20
1.1.19	Harghita	21
1.1.20	Hunedoara	22
1.1.21	Iași	22
1.1.22	Maramureș	23
1.1.23	Mehedinți	23
1.1.24	Neamț	24
1.1.25	Olt	24
1.1.26	Prahova	25
1.1.27	Sălaj	26
1.1.28	Sibiu	26

1.1.29	Suceava	27
1.1.30	Teleorman	27
1.1.31	Vaslui	28
1.1.32	Vâlcea	28
1.1.33	Vrancea	29
1.2	Etapa județeană și a municipiului București	29
1.3	Etapa națională - România	30
1.4	Probleme avute în atenția comisiei de selecție	31
1.5	Etapa națională - Moldova	33
1.6	Concursuri alte țări	34
1.6.1	Etapa națională - Belarus	34
1.6.2	Etapa națională - Bulgaria	35
1.6.3	Etapa națională - Rusia	36
1.6.4	Etapa națională - Serbia și Muntenegru	36
1.6.5	Etapa națională - Slovenia	37
1.6.6	Etapa națională - Ucraina	37
1.7	Concursuri interjudețene	38
1.7.1	Academician Radu Miron	38
1.7.2	Gheorghe Vrânceanu	39
1.7.3	Unirea 2006	39
1.7.4	Mathematica-Modus Vivendi	40
1.7.5	Grigore C. Moisil	40
1.7.6	Nicolae Coculescu	41
1.7.7	Gheorghe Țițeica	42
1.7.8	Concursul Gazetei de Matematica	42
2	Clasa a IX-a - Soluții	45
2.1	Etapa locală	45
2.1.1	Alba	45
2.1.2	Arad	47
2.1.3	Argeș	49
2.1.4	Bacău	52
2.1.5	Bihor	53
2.1.6	Botoșani	54
2.1.7	Brașov	56
2.1.8	Brăila	58
2.1.9	București	60
2.1.10	Buzău	61
2.1.11	Caraș-Severin	61
2.1.12	Călărași	63
2.1.13	Cluj	64

2.1.14	Constanța	66
2.1.15	Dâmbovița	68
2.1.16	Dolj	70
2.1.17	Galați	72
2.1.18	Giurgiu	74
2.1.19	Harghita	76
2.1.20	Hunedoara	77
2.1.21	Iași	78
2.1.22	Maramureș	79
2.1.23	Mehedinți	80
2.1.24	Neamț	81
2.1.25	Olt	82
2.1.26	Prahova	84
2.1.27	Sălaj	85
2.1.28	Sibiu	86
2.1.29	Suceava	87
2.1.30	Teleorman	88
2.1.31	Vâlcea	89
2.1.32	Vaslui	90
2.1.33	Vrancea	91
2.2	Etapa județeană și a municipiului București	92
2.3	Etapa națională - România	94
2.4	Etapa națională - Moldova	95
2.5	Concursuri interjudețene	97
2.5.1	Academician Radu Miron	97
2.5.2	Gheorghe Vrănceanu	98
2.5.3	Unirea 2006	100
2.5.4	Mathematica-Modus Vivendi	102
2.5.5	Grigore Moisil	104
2.5.6	Nicolae Coculescu	106
2.5.7	Gheorghe Țițeica	108
2.5.8	Concursul Gazetei de Matematica	112

Capitolul 1

Clasa a IX-a - Enunțuri

1.1 Etapa locală

1.1.1 Alba

1. Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică de rație $r \neq 0$ dacă și numai dacă $\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Se dă ecuația $\left[\frac{m^2 x - 1}{2} \right] = \frac{2x + 1}{5}$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Să se calculeze suma rădăcinilor ecuației.
3. În triunghiul ABC , fie P , Q și R punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC , CA și respectiv AB . Demonstrați că dacă $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = \vec{0}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.
4. Arătați că numărul $A = 5^{4n+1} - 3 \cdot 10^{2n} - 2^{4n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, este divizibil cu 147.

1.1.2 Arad

1. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c = 1$. Să se arate că

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3abc} \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

Doru Ianculescu

2. Trei oameni au scris fiecare câte o sută de cuvinte diferite. După aceea, confruntând listele, s-au șters cuvintele care s-au găsit cel puțin de două ori. Ca rezultat, unul a rămas cu 45 de cuvinte, altul cu 68 iar al treilea cu 54. Să se demonstreze că cel puțin un cuvânt a fost scris de toți trei.

3. Determinați funcțiile $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ pentru care avem $f(2) = 1$ și

$$nf(n-1) + (n-1)f(n) = 0,$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Fie ABC un triunghi având lungimile laturilor a, b, c , iar centrul cercului înscris notat cu I . Arătați că are loc relația $\vec{r}_I = \frac{a \cdot \vec{r}_A + b \cdot \vec{r}_B + c \cdot \vec{r}_C}{a + b + c}$, unde $\vec{r}_X$ reprezintă vectorul de poziție al punctului X .

1.1.3 Argeș

1. Se construiește șirul:

$$A_1 = \{0\}, A_2 = \{2, 4\}, A_3 = \{6, 8, 10\}, A_4 = \{12, 14, 16, 18\}, \dots, A_n, \dots$$

- a) Să se determine mulțimea A_n .
b) Să se arate că suma S_n a elementelor mulțimii A_n este divizibilă cu 6.
c) Există $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $S_m + S_n + S_p \leq 3mnp$?

Marin Chirciu

2. a) Să se arate că dacă $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$, $g: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$, $f(n) = \{n\sqrt{4k+2}\}$, $g(n) = \{n\sqrt{4k+3}\}$, $k \in \mathbb{N}$, fixat, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x , atunci funcțiile f și g sunt injective (adică, dacă $f(a) = f(b)$ rezultă că $a = b$).

Ion Călinescu

- b) Fie n și m numere naturale nenule fixate. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\left\{ \frac{x}{n} \right\} = \left\{ \frac{x}{n+m} \right\}, \quad x \in (0, n(n+m)),$$

unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x .

Marin Chirciu

3. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$, $x_2 = a$, unde $a \geq 2$ și $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{x_n} + 1$, pentru orice $n \geq 2$. Arătați că $\frac{a+1}{a} \leq x_n \leq a+1$, pentru orice $n \geq 2$.

Marin Chirciu

4. Fie ABC un triunghi cu $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ și $\lambda \in (0, \infty)$. Pe semidreptele (AB) , (AC) , (BC) , (BA) , (CA) , (CB) considerăm respectiv punctele A' , A'' , B' , B'' , C' , C'' astfel încât $AA' = c + \lambda a$, $AA'' = b + \lambda a$, $BB' = a + \lambda b$, $BB'' = c + \lambda b$, $CC' = b + \lambda c$, $CC'' = a + \lambda c$. Pe segmentele $(A'A'')$, $(B'B'')$, $(C'C'')$, $(A''B')$,

$(B''C'')$, $(C''A'')$ considerăm respectiv punctele A''' , B''' , C''' , C_1 , A_1 , B_1 astfel încât $\overrightarrow{A'''A''} = -\lambda \cdot \overrightarrow{A'''A'}$, $\overrightarrow{B'''B''} = -\lambda \cdot \overrightarrow{B'''B'}$, $\overrightarrow{C'''C''} = -\lambda \cdot \overrightarrow{C'''C'}$, $\overrightarrow{C_1A''} = -\lambda \cdot \overrightarrow{C_1A'}$, $\overrightarrow{A_1B''} = -\lambda \cdot \overrightarrow{A_1B'}$, $\overrightarrow{B_1C''} = -\lambda \cdot \overrightarrow{B_1C'}$.

a) Aflați valorile lui λ pentru care $A'''B'''C'''$ este un triunghi cu proprietatea $B \in A'''C'''$, $C \in A'''B'''$, $A \in B'''C'''$.

b) Arătați că triunghiurile $A'''B'''C'''$ și $A_1B_1C_1$ au același centru de greutate.

Ștefan Alexe

1.1.4 Bacău

1. Fie $m(t) = \min\left(t, \frac{t+2}{t+1}\right)$ și $M(t) = \max\left(t, \frac{t+2}{t+1}\right)$, $t > 0$ fiind un număr rațional oarecare.

a) Să se arate că $m(t) < \sqrt{2} < M(t)$, oricare ar fi numărul rațional $t > 0$.

b) Dacă $t \in \mathbb{Q}$, $t > 0$, să se ordoneze expresiile: $\sqrt{2} - m(t)$ și $M(t) - \sqrt{2}$.

2. Fie $A_1, A_2, \dots, A_6$ vârfurile unui hexagon regulat cu centrul în O . Dacă $x_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, 2, \dots, 6$) și $x_1\overrightarrow{OA_1} + x_2\overrightarrow{OA_2} + \dots + x_6\overrightarrow{OA_6} = 0$, să se arate că

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = x_4 + 2x_5 + x_6.$$

3. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația: $\{(x - 2006)^2 \cdot \sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1$, unde paranteza acoladă desemnează partea fracționară.

4. Să se arate că: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{41}{24}$, oricare ar fi n din $\mathbb{N}^*$.

1.1.5 Bihor

1. a) Arătați că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a + b + c = 6$, atunci $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$.

b) Rezolvați ecuația: $\sqrt{x - y + 3} + \sqrt{3y - 2x + 4} + \sqrt{x - 2y + 5} = 6$.

Petrișor Neagoe

2. Determinați numerele raționale x și y pentru care există $m, n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x + y = m$ și $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = n$.

Nicolae Dragomir, Tudor Deaconu

3. Pentru orice funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și orice număr natural m notăm

$$A_m = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = m\}.$$

Spunem că o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție *simplă* dacă pentru orice $m \in \mathbb{N}$, mulțimea A_m are cel mult două elemente.

Capitolul 2

Clasa a IX-a - Soluții

2.1 Etapa locală

2.1.1 Alba

1. Presupunem că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică. Rezultă:

$$\frac{1}{a_i a_{i+1}} = \frac{1}{r} \frac{a_{i+1} - a_i}{a_i a_{i+1}} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \right), \text{ oricare ar fi } i = \overline{1, n-1}$$

și prin însumare:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i a_{i+1}} &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right) = \\ &= \frac{1}{r} \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n} = \frac{1}{r} \frac{(n-1)r}{a_1 a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}. \end{aligned}$$

Presupunem acum că egalitatea din enunț are loc oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și demonstrăm că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică. Folosim metoda inducției. Pentru $n = 2$ nu avem ce demonstra. Pentru $n = 3$, avem egalitatea: $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{2}{a_1 a_3}$; care implică: $a_1 + a_3 = 2a_2$ sau: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ și notând $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, obținem că a_1, a_2, a_3 sunt în progresie aritmetică de rație r .

Presupunem acum că dacă egalitatea: $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i a_{i+1}} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$ are loc oricare ar fi n , atunci numerele $a_1, \dots, a_n$ sunt în progresie aritmetică cu rația r și fie a_{n+1} astfel

$$\text{încât } \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i a_{i+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}.$$

Putem scrie: $\frac{n}{a_1 a_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i a_{i+1}} + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n-1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ deci:

$$\frac{n}{a_1 a_{n+1}} = \frac{n-1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_n a_{n+1}}.$$

Din această egalitate rezultă: $na_n = (n-1)a_{n+1} + a_1$ de unde $a_{n+1} = a_1 + nr_1$ adică numerele $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ sunt în progresie aritmetică de rație r .

2. Notăm $\frac{2x+1}{5} = k \in \mathbb{Z}$ și rezultă: $x = \frac{5k-1}{2}$.

Ecuția devine: $\left[\frac{m^2(5k-1)-2}{4} \right] = k$, deci: $k \leq \frac{m^2(5k-1)-2}{4} < k+1$, sau: $4k+2 \leq m^2(5k-1) < 4k+6$. Rezultă că: $m^2(5k-1) \in \{4k+2, 4k+3, 4k+4, 4k+5\}$.

a) $m^2(5k-1) = 4k+2 \Rightarrow 5m^2 = \frac{20k+10}{5k-1} = 4 + \frac{14}{5k-1}$.

Rezultă că $5k-1 \in \{-14, -7, -2, -1, 1, 2, 7, 14\}$ și apoi $k \in \{0, 3\}$. Convine $k = 3$ (și rezultă $m = \pm 1$). Deci $x = 7$.

b) $m^2(5k-1) = 4k+3 \Rightarrow 5m^2 = \frac{20k+15}{5k-1} = 4 + \frac{19}{5k-1}$.

Rezultă $5k-1 \in \{-19, -1, 1, 19\}$ și apoi $k \in \{0, 4\}$. Convine $k = 4$, deci $x = \frac{19}{2}$.

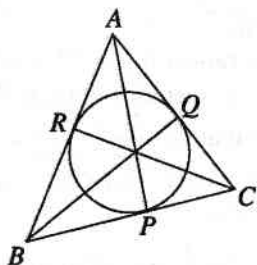
c) $m^2(5k-1) = 4k+4 \Rightarrow 5m^2 = \frac{20k+20}{5k-1} = 4 + \frac{24}{5k-1}$.

Rezultă $5k-1 \in \{-24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ și apoi $k \in \{-1, 0, 1, 5\}$. Convine $k = -1$ și $k = 5$ (rezultă $m \in \{-1, 0, 1, \dots\}$), deci $x \in \{-3, 12\}$.

d) $m^2(5k-1) = 4k+5 \Rightarrow 5m^2 = \frac{20k+25}{5k-1} = 4 + \frac{29}{5k-1}$.

Rezultă $5k-1 \in \{-29, -1, 1, 29\}$ și apoi $k \in \{0, 6\}$. Convine $k = 6$ și rezultă $x = \frac{29}{2}$. Așadar mulțimea rădăcinilor ecuației este $\left\{7, \frac{19}{2}, -3, 12, \frac{29}{2}\right\}$ și suma rădăcinilor este 40.

3.



Fie p semiperimetrul triunghiului și a, b, c lungimile laturilor. Rezultă (fără dificultate) că $BP = BR = p - b$, $CP = CQ = p - c$, $AR = AQ = p - a$ și apoi:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{(p-c)\overrightarrow{AB} + (p-a)\overrightarrow{AC}}{2p-b-c} = \\ &= \frac{(p-c)\overrightarrow{AB} + (p-b)\overrightarrow{AC}}{a}; \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{(p-c)\overrightarrow{BA} + (p-a)\overrightarrow{BC}}{2p-a-c} = \frac{(p-c)\overrightarrow{BA} + (p-a)\overrightarrow{BC}}{b}$$

și

$$\overrightarrow{CR} = \frac{(p-b)\overrightarrow{CA} + (p-a)\overrightarrow{CB}}{2p-a-b} = \frac{(p-b)\overrightarrow{CA} + (p-a)\overrightarrow{CB}}{c};$$

de unde:

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} =$$

$$= \left(\frac{p-c}{a} - \frac{p-c}{b} \right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{p-a}{b} - \frac{p-a}{c} \right) \overrightarrow{BC} + \left(\frac{p-b}{c} - \frac{p-b}{a} \right) \overrightarrow{CA}.$$

Din $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$, deci egalitatea anterioară devine:

$$\left(\frac{p-c}{a} - \frac{p-c}{b} - \frac{p-b}{c} + \frac{p-b}{a} \right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{p-a}{b} + \frac{p-a}{c} + \frac{p-b}{c} + \frac{p-b}{a} \right) \overrightarrow{BC} = \vec{0}.$$

Punând condiția ca coeficienții vectorilor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$ să fie nuli, rezultă:

$$\begin{cases} \frac{2p-b-c}{c} = \frac{p-b}{b} + \frac{p-c}{a} \\ \frac{2p-a-b}{c} = \frac{p-c}{b} + \frac{p-b}{a} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} ab+ac=b^2+c^2 \\ bc+ac=a^2+b^2 \end{cases}.$$

Din ultimele două egalități rezultă (prin scădere de exemplu) că $a = c$ și de aici $a = b = c$.

4. Fie $a = 5^{2n}$, $b = 2^{2n}$. rezultă: $A = 5a^2 - 3ab - 2b^2 = (a-b)(5a+2b)$.

Avem: $a - b = 5^{2n} - 2^{2n} = 25^n - 4^n : (25 - 4)$, deci $21 \mid a - b$. (1)

Analog, $5a + 2b = 5^{2n+1} + 2^{2n+1} : 7$, deci $7 \mid 5a + 2b$. (2)

Din (1) și (2), rezultă că $147 = 21 \cdot 7 \mid A$.

2.1.2 Arad

1. **Soluția 1.** Deconționăm inegalitatea; punem $a = xr$, $b = yr$, $c = zr$, și din $a + b + c = 1$, rezultă $r = \frac{1}{x+y+z}$. Deci

$$a = \frac{x}{x+y+z}, b = \frac{y}{x+y+z}, c = \frac{z}{x+y+z}.$$

Prima parte a inegalității este echivalentă cu:

$$\begin{aligned} \frac{x+y+z}{x} + \frac{x+y+z}{y} + \frac{x+y+z}{z} &\leq \frac{1}{3} \frac{(x+y+z)^3}{xyz} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) &\leq \frac{1}{3} \frac{(x+y+z)^3}{xyz} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3xyz \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) &\leq (x+y+z)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3(xy+yz+zx) &\leq x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 &\geq xy+yz+zx \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

inegalitatea adevărată.

Partea a doua a inegalității este echivalentă cu:

$$\frac{(x+y+z)^3}{xyz} \leq (x+y+z)^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \Leftrightarrow x+y+z \leq xyz \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \Leftrightarrow$$